

Analyse I

Prerequis.

§0.1. Identités algébriques

Polynomiales:

$$(x+y)^2 = x^2 + 2xy + y^2$$

$$x^2 - y^2 = (x-y)(x+y)$$

$$x^3 - y^3 = (x-y)(x^2 + xy + y^2)$$

$$x^3 + y^3 = (x+y)(x^2 - xy + y^2)$$

Exponentielles: a, b nombres réels positifs; x, y nombres réels.

$$a^x a^y = a^{x+y}$$

$$(a^x)^y = a^{x \cdot y}$$

$$\frac{a^x}{a^y} = a^{x-y}$$

$$\sqrt[n]{a} = a^{\frac{1}{n}}$$

$$(ab)^x = a^x \cdot b^x$$

$$\left(\frac{a}{b}\right)^x = \frac{a^x}{b^x}$$

$$a^0 = 1$$

$$a^1 = a$$

n naturel positif

Logarithmiques:

$\log = \log_e$
logarithme naturel

$$\log(xy) = \log x + \log y$$

$$\log\left(\frac{x}{y}\right) = \log x - \log y$$

$$\log(x^c) = c \cdot \log x$$

$$\log_a(1) = 0$$

$$\log_a(a) = 1$$

x, y réels positifs ⁻²⁻

c réel

a réel positif
 $a \neq 1$

§ 0.2 Trigonométrie

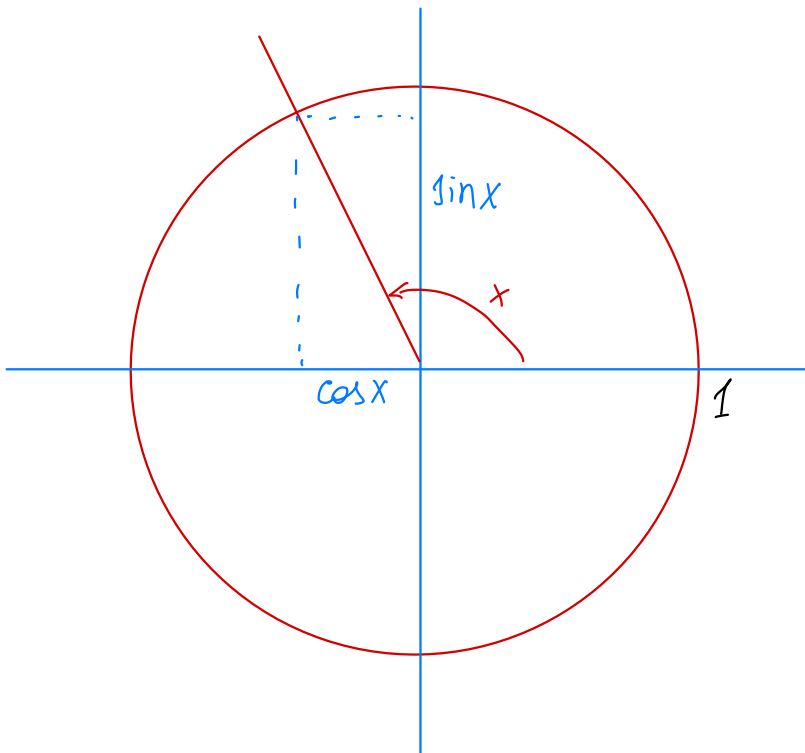
$\sin x, \cos x$ pour tout x réel

$$\operatorname{tg} x = \frac{\sin x}{\cos x}$$

$$\cos x \neq 0$$

$$\operatorname{ctg} x = \frac{\cos x}{\sin x}$$

$$\sin x \neq 0$$



$$\begin{aligned}\sin(x \pm y) &= \sin x \cos y \pm \cos x \sin y \\ \cos(x \pm y) &= \cos x \cos y \mp \sin x \sin y\end{aligned}$$

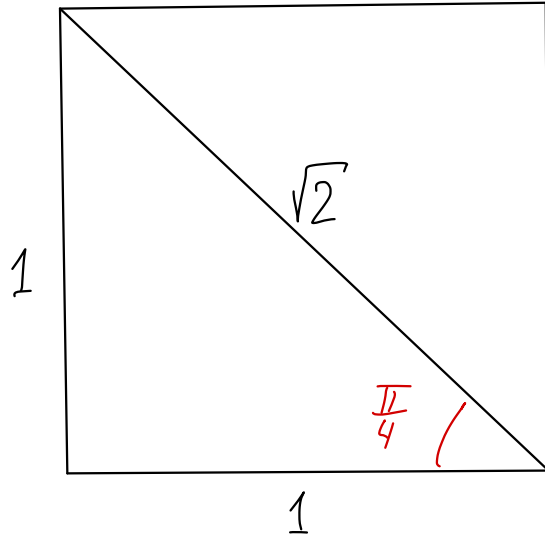


$$1 = \cos(x-x) = \cos^2 x + \sin^2 x$$

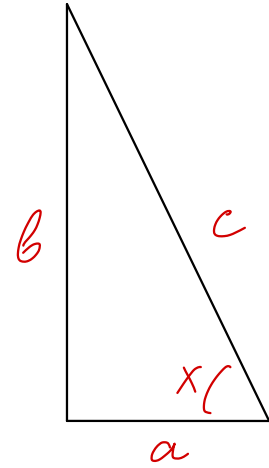
$$\cos^2 x + \sin^2 x = 1$$

Valeurs de $\cos x$, $\sin x$ pour $x = \frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{2}, \pi, 0 \dots$

-3-

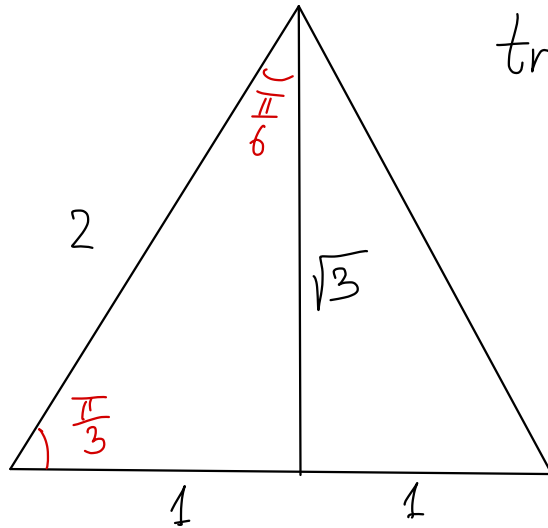


$$\Rightarrow \sin \frac{\pi}{4} = \cos \frac{\pi}{4} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$



$$\sin x = \frac{b}{c}$$

$$\cos x = \frac{a}{c}$$



triangle équilatérale de côté = 2

$$\Rightarrow \sin \frac{\pi}{6} = \cos \frac{\pi}{3} = \frac{1}{2}$$

$$\sin \frac{\pi}{3} = \cos \frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

§0.3. Types des fonctions élémentaires

-4-

(1) Polynômes $f(x) = 3x^3 + 5x + 4$

→ linéaire $f(x) = ax + b$ a, b nombres réels

→ quadratique $f(x) = ax^2 + bx + c$ a, b, c réels $a \neq 0$

(2) Fonctions rationnelles

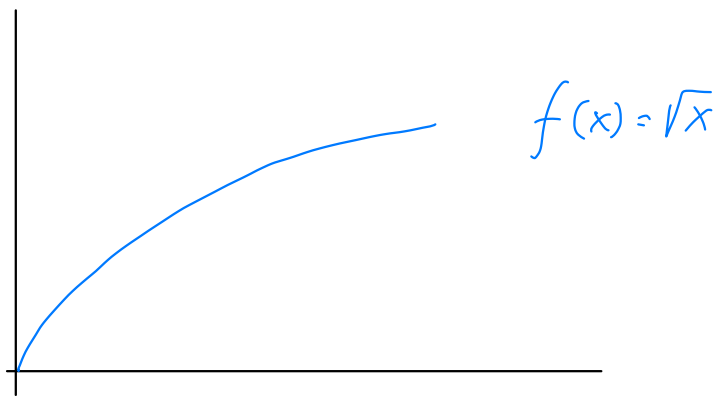
$$f(x) = \frac{P(x)}{Q(x)} \quad \text{où } P(x) \text{ et } Q(x) \text{ sont des polynômes}$$

$Q(x) \neq 0$

(3) Fonctions algébriques

Toute fonction obtenue à partir des polynômes par application des opérations $+$, $-$, $\div$, $*$, $\sqrt{\quad}$

Ex: $f(x) = \sqrt{x}$
 $x \geq 0$

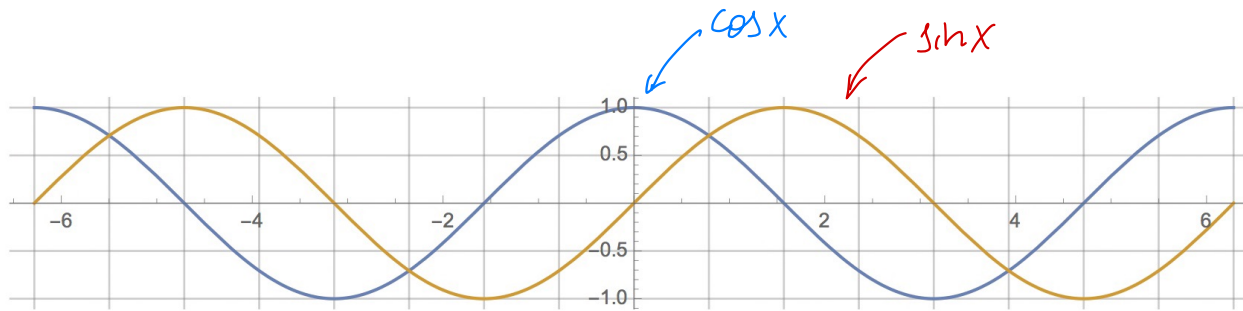


(4) Fonctions transcendentes (= fonctions qui ne sont pas algébriques) -5-

(4a) Fonctions trigonométriques (et leurs réciproques)

$$f(x) = \sin x, \quad g(x) = \cos x$$

$$\cos(x) = \sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right)$$



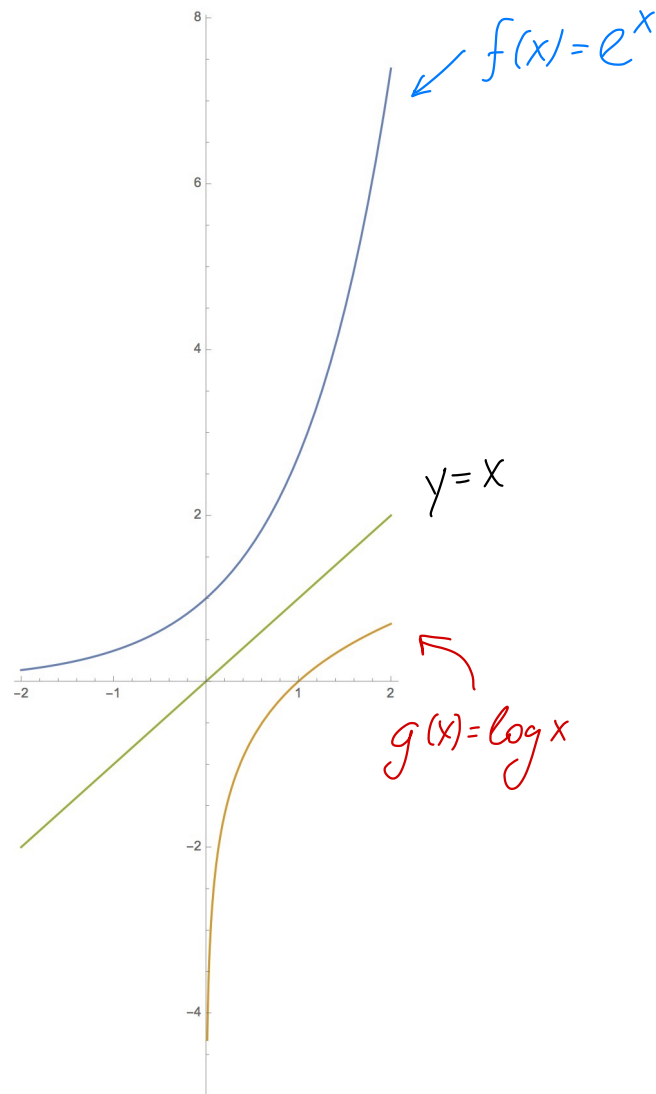
(4b) Fonctions exponentielles et logarithmiques

$$f(x) = e^x \quad ; \quad g(x) = \log(x), \quad x > 0 \quad (\log \text{ de base } e)$$

$$\text{Pour tout } x \text{ réel} \quad \Rightarrow \quad \log(e^x) = x$$

$$\text{Pour tout } x \text{ réel positif} \quad \Rightarrow \quad e^{\log x} = x \quad \Leftrightarrow \quad e^x \text{ et } \log x \text{ sont des fonctions réciproques}$$

Ex



-6-
En général, si on a

$$y = f(x) \stackrel{\text{dét}}{\iff} x = f^{-1}(y)$$

on dit que $f(x)$ et $f^{-1}(x)$
sont réciproques

(il faut préciser les valeurs
admissibles)

Les graphiques de f et f^{-1}
sont symétriques par rapport
à la droite $x = y$

Ex

$$f(x) = a^x \quad a > 0, a \neq 1, x \text{ réel}$$

Alors la fonction réciproque de f est $f^{-1}(x) = \log_a x, x > 0$.

§0.4. Fonctions injectives, surjectives, bijectives et réciproques.

-7-

Déf Soient E, F deux ensembles des nombres réels.

$f: E \rightarrow F$ est une règle qui donne une seule valeur $f(x)$ pour tout $x \in D_f \subset E$

$D_f = D(f) \stackrel{\text{def}}{=} \{x \in E : f(x) \text{ est bien définie}\} = \text{le domaine de définition}$

$f(D) \stackrel{\text{def}}{=} \{y \in F : \text{il existe } x \in D_f \text{ tel que } f(x) = y\} = \text{l'ensemble image.}$

Déf $f: E \rightarrow F$ est surjective si pour tout $y \in F$ il existe au moins un $x \in D_f$ tel que $f(x) = y$.

Déf $f: E \rightarrow F$ est injective si pour tout couple $x_1, x_2 \in D_f$,
tel que $f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2$.

Déf Si $f: E \rightarrow F$ est injective et surjective, elle est bijective

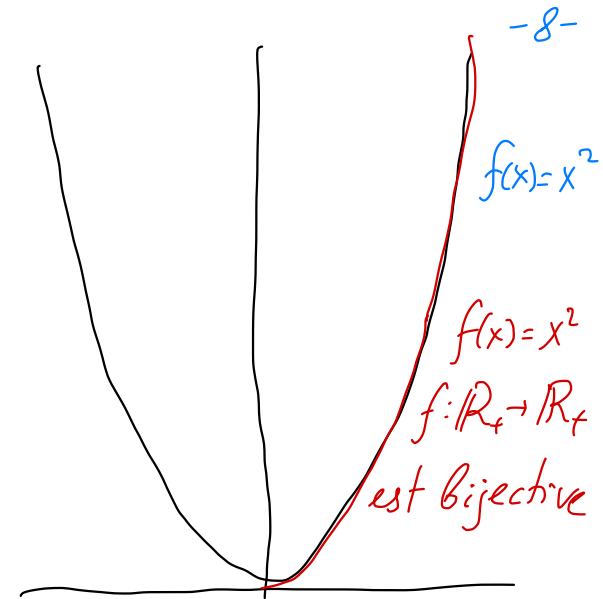
Ex. $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ $f(x) = x^2$ n'est pas surjective

$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}_+ = \text{réels non négatifs}$ $f(x) = x^2$ est surjective

$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}_+$ $f(x) = x^2$ n'est pas injective

$f: \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+$ $f(x) = x^2$ est injective

$\Rightarrow f: \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+$ est bijective.

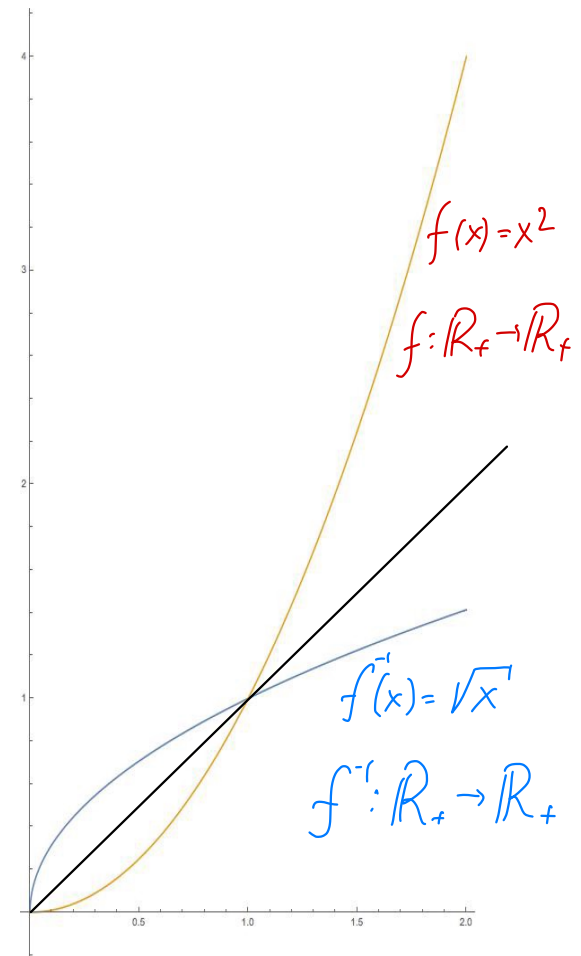


Déf. Pour $f: E \rightarrow F$ bijective on définit la fonction réciproque par l'équation $f(x) = y \Leftrightarrow x = f^{-1}(y)$
 $x \in E$ $y \in F$

Ex 1. $f(x) = x^2 : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+$ bijective

$f^{-1}(x) = \sqrt{x} : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+$
sa fonction réciproque

Les graphiques sont symétriques par rapport à la droite $x = y$

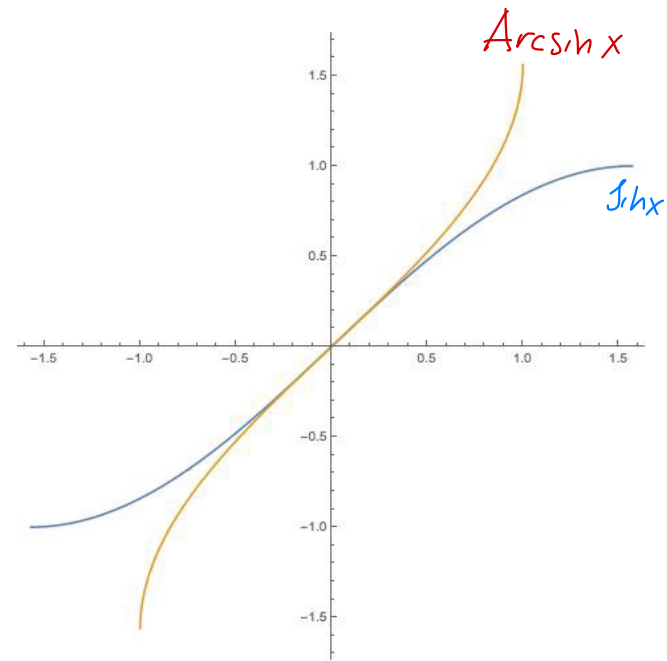


Si la fonction n'est pas bijective, on coupe son domaine de définition (et son ensemble d'arrivée) pour obtenir une fonction bijective. -9-

Ex 2. $\sin : \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] \rightarrow [-1, 1]$ bijective

$$y = \sin x \Leftrightarrow x \stackrel{\text{dét}}{=} \text{Arcsin } y$$

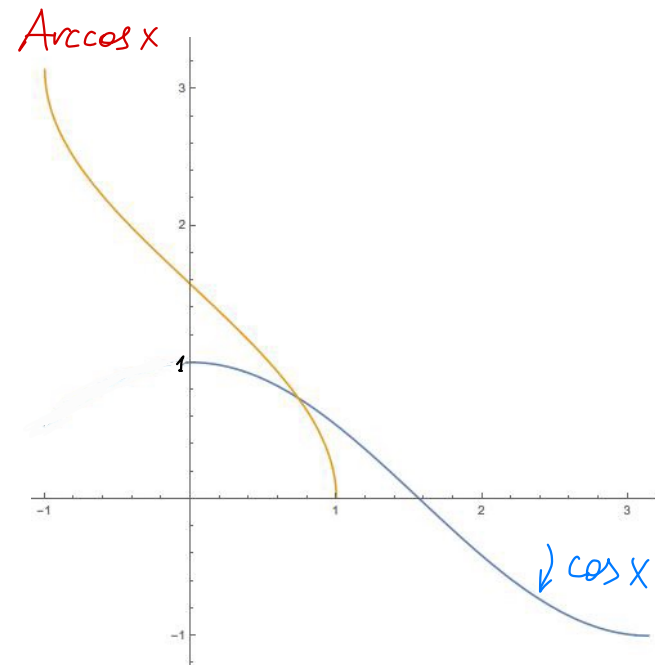
$$\text{Arcsin} : [-1, 1] \rightarrow \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$$



Ex 3. $\cos : [0, \pi] \rightarrow [-1, 1]$ bijective

$$y = \cos x \Leftrightarrow x = \text{Arccos } y$$

$$\text{Arccos} : [-1, 1] \rightarrow [0, \pi]$$



§0.5. Fonctions composées.

-10-

Soit $f: D_f \rightarrow \mathbb{R}$, $g: D_g \rightarrow \mathbb{R}$

Supposons que $f(D_f) \subset D_g$ Alors on peut définir la fonction composée

$g \circ f: D_f \rightarrow \mathbb{R}$ par la formule $g \circ f(x) = g(f(x))$

En général, $g \circ f \neq f \circ g$

Ex 1. $f(x) = 2x + 3$, $g(x) = \sin x \Rightarrow g \circ f(x) = g(2x + 3) = \sin(2x + 3)$
 $f \circ g(x) = f(\sin x) = 2\sin x + 3$

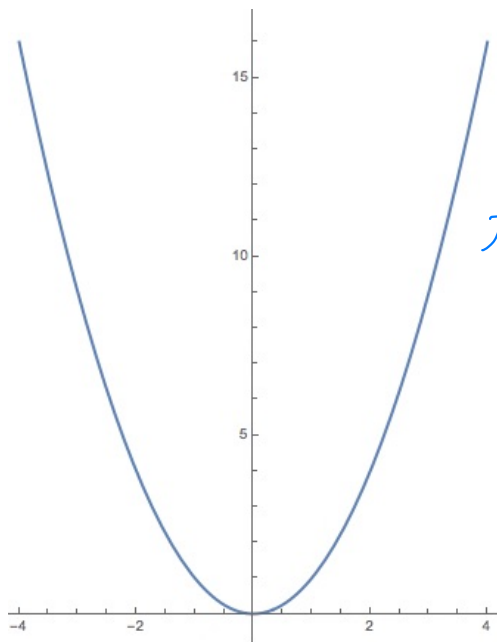
Ex 2. $f^{-1} \circ f(x) = f^{-1}(f(x)) = f^{-1}(y) = x$ par déf d'une fonction
réciproque
 $f \circ f^{-1}(y) = f(f^{-1}(y)) = f(x) = y$

Ex 3. $f(x) = x^3$. Alors $f \circ f \circ f \circ f(x) = f(f(f(x^3))) =$
 $= f(f(x^9)) = f(x^{27}) = x^{81}$.

§0.6. Transformations des graphiques.

-11-

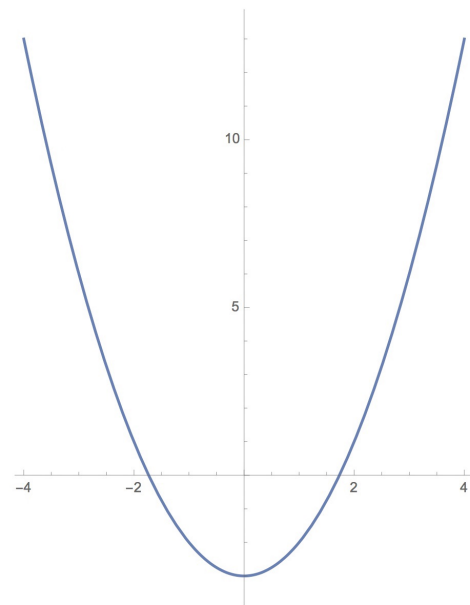
Ex $f(x) = x^2$



$f(x) = x^2$

descendre le graphique
de $f(x) = x^2$ par 3

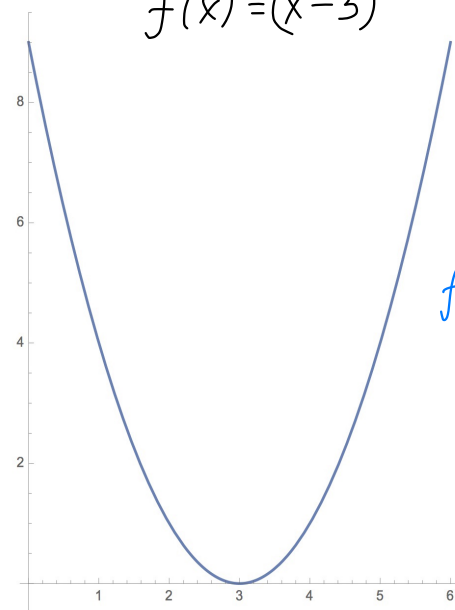
$f(x) = x^2 - 3$



$f(x) = x^2 - 3$

deplacer le graphique
de $f(x) = x^2$ à droite par 3

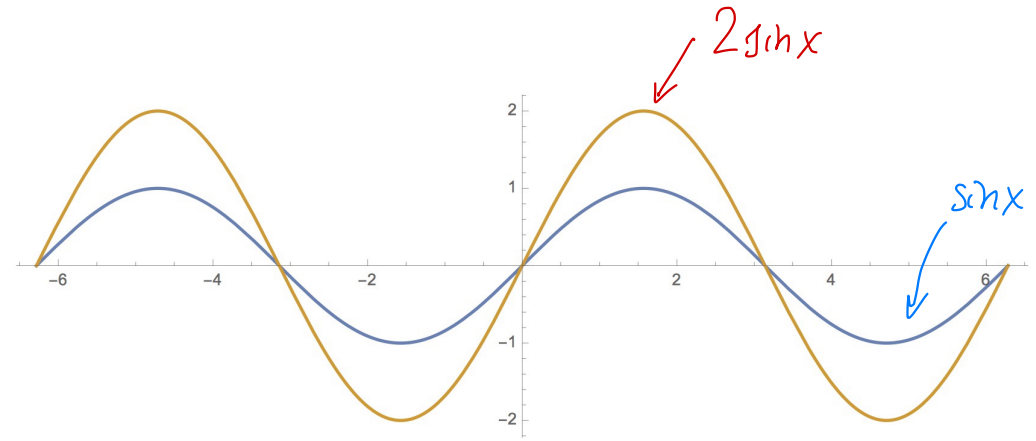
$f(x) = (x-3)^2$



$f(x) = (x-3)^2$

Ex $f(x) = 2\sin x$

Etendre le graphique
de $f(x) = \sin x$
en direction verticale



Ex $f(x) = \sin(2x)$

Serrer le graphique
de $f(x) = \sin x$
en direction horizontale.

